Τρίτη 06/10/20

Ακέραιος Προγραμματισμός

Ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στο οποίο κάποιες ή όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιοι. Συνήθως τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις.

Δυναμικός Προγραμματισμός

Είναι η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων που διατυπώνεται σε μια αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων.

Θεωρία Αποφάσεων

Παρουσίαση μεθοδολογιών για τη λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας

Μη γραμμικός προγραμματισμός

Ασχολείται με το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης κάτω από περιορισμούς ισοτήτων και ανισοτήτων.

Πρόβλημα μη Γραμμικού Προγραμματισμού

$\min/\max f(x)$

υπό τους περιορισμούς $g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots m.$

$h_i(x) = 0$ για $i = 1, 2, \dots n.$

$x \in S.$

f, g_i, h_i συναρτήσεις ορισμένες στον $\mathbb{R}^n$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$
και x διάνυσμα με n συντεταγμένες

Στόχος: Εύρεση τιμών για τις μεταβλητές απόφασης $x_1, \dots x_n$ που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς και ταυτόχρονα ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση f.

Το σύνολο S μπορεί να περιλαμβάνει άνω και κάτω όρια.

Γραμμικός Προγραμματισμός

$$
\begin{cases}
\min/\max(cx) \\
Ax \le, \ge, = b. \\
x \ge 0
\end{cases}
\qquad c, x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m
$$

Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός

- Μικτός: μερικές μεταβλητές είναι ακέραιες
- 0-1: οι μεταβλητές παίρνουν την τιμή 0 ή 1
- Αμιγής: όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιες

$$
\begin{cases}
\min/\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{Υπο τους περιορισμούς:} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \dots m \\
x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots n. \\
x_j \text{ ακέραιος για κάποιο ή για όλα τα } j = 1, \dots n
\end{cases}
$$

• Δεν υπάρχει γνωστός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για την επίλυση γενικών προβλημάτων μικτού ακέραιου προγραμ.

Πρόβλημα ανάθεσης/εκχώρησης. (Assigment problem)

Έστω n εργασίες, που πρέπει να ανατεθούν σε n άτομα
Κάθε εργασία μπορεί να ανατεθεί μόνο σε ένα άτομο (1)
Κάθε άτομο μπορεί να αναλάβει μόνο μια εργασία (2)
Έστω c_{ij} το κόστος αν το άτομο i αναλάβει την εργασία j

Στόχος: Η ανάθεση εργασιών σε άτομα ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος

Μοντελοποίηση:

Ορίζουμε $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } i \text{ αναλαβει την εργασια } j \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$

Το συνολικό κοστος δίνεται απο την αντικειμενική συνάρτηση

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

(2) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots n.$$

(1) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots n.$$

Πρόβλημα Σακιδίου (0-1 knapsack problem)
Έστω ένας ορειβάτης έχει συνολικά N αντικείμενα κι ένα σακίδιο περιορισμένης χωρητικότητας W.
Στο αντικείμενο $i \in \{1, \dots N\}$ αντιστοιχεί ένα βάρος w_i και μια αξία (για τον ορειβάτη) v_i. Στόχος του ορειβάτη είναι η επιλογή των αντικειμένων ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξία.

Μοντελοποίηση:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το αντικ. } i \text{ μπει στο σακίδιο} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συνολική αξία: $Z = \sum_{i=1}^{N} v_i x_i$

Περιορισμός: $\sum_{i=1}^{N} w_i x_i \leq W$ (Το συνολικό βάρος να μην υπερβαίνει την χωρητικότητα.

Διαχείριση Κεφαλαίου-Προϋπολογισμού- Χαρτοφυλακίου.
Σε ένα τυπικό πρόβλημα διαχείρισης χαρτοφυλακίου η απόφαση αφορά μεταξύ n-δυνατών επενδύσεων.

Υποθέτουμε ότι c_j είναι η απόδοση από την j επένδυση και a_{ij} είναι η ποσότητα του πόρου i, $i=1, \dots m$ που χρησιμοποιείται στην επένδυση j.

Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής απόδοσης υπό κάποιους λογικούς περιορισμούς (π.χ) η επένδυση στη γραμμή παραγωγής i προϋποθέτει την κατασκευή του εργοστασίου j, υπάρχει περιορισμένος αριθμός πόρων).

Μοντελοποίηση:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν γίνει η επένδυση } j, \quad j=1,\dots n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,\dots m$$

$$x_j = 0 \text{ ή } 1, \quad \forall j=1,\dots n.$$

Λογικοί περιορισμοί:

→ Η επενδυση στην παραγωγή i προϋποθέτει κατασκευή του εργοστασίου j: $x_i \leq x_j$ (αν $x_i=1$, τοτε $x_j=1$)

→ Το πολύ μια απο τις επενδύσεις 1,2,3 μπορεί να γίνει $x_1+x_2+x_3 \leq 1$ (Αν $x_1=1$, τοτε $x_2=x_3=0$).

Μοντελοποίηση Λογικών Προτασεων με χρήση δυαδικών Μεταβλητών

Είτε - Είτε (τουλάχιστον ένας από τους περιορισμούς πρεπει να ισχύει

π.χ) είτε $2x_1+x_2 \leq 5$ είτε $2x_3 - x_4 \leq 2$.

Ορίζουμε $y_1 \in \{0,1\}$ και μετασχηματίζουμε τους περιορισμούς σε

$$2x_1+x_2 \leq 5 + My_1$$
$$2x_3 - x_4 \leq 2 + M(1-y_1)$$

Έτσι αν $y_1=0$ Ισχύει $2x_1+x_2 \leq 5$.

$2x_3 - x_4 \leq 2+M$ που μπορει και να μην ικανοποιει

Αρα με αυτον τον τροπο εξασφαλίζουμε οτι τουλαχιστον ένας από τους δυο θα ικανοποιείται

Αν Α, τότε Β (μόνο για ακέραιες μεταβλητές)

π.χ) Αν $2x_1 + x_2 \leq 5$ τότε πρέπει $2x_3 - x_4 \leq 2$.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$2x_1 + x_2 > 5$ → επειδή δεν θέλουμε γνήσια μικρότερο/μεγ.

ή $2x_3 - x_4 \leq 2$ έχουμε το παρακάτω:

ή και τα δυο

$2x_1 + x_2 \geq 6$ ή $2x_3 - x_4 \leq 2$ ή και τα δυο $\Leftrightarrow$

$-2x_1 - x_2 \leq -6$ ή $2x_3 - x_4 \leq 2$ ή και τα δυο

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στον περιορισμό «είτε-είτε» και ορίζουμε $y_1 \in \{0,1\}$ μετασχηματίζοντας τους περιορι

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &\leq -6 + My_1 \\ 2x_3 - x_4 &\leq 2 + M(1-y_1) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6 - My_1 \\ 2x_3 - x_4 &\leq 2 + M(1-y_1) \end{aligned}$$

Ακριβώς k από m περιορισμούς (μόνο για ακέραιες μεταβλητές)

Έστω ότι πρέπει να ισχύουν ακριβώς k από τους m ακόλουθους περιορισμούς:

$f_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1$

$f_2(x_1, \dots x_n) \leq b_2$

$\vdots$

$f_m(x_1, \dots x_n) \leq b_m$

Τότε ορίζουμε $y_1, \dots y_m \in \{0,1\}$ και μετασχηματίζουμε τους περιορισμούς σε: $f_1(x_1, \dots x_n) \leq b_1 + My_1$

$\vdots$

$f_m(x_1, \dots x_n) \leq b_m + My_m$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = m - k$$

▷ Αν θέλουμε να ισχύουν «τουλάχιστον k από τους m»

τότε $\sum_{i=1}^{m} y_i \leq m-k$.

▷ «το πολύ k από τους m» ⟺ «τουλάχιστον m−k να ΜΗΝ ικανοποιούνται».

Λογικοί περιορισμοί αν $x_i = 0$ ή 1

- Αν το στοιχείο i επιλεγεί, τότε το στοιχείο j επίσης θα επιλεγεί: $x_i \leq x_j$
- Ακριβώς ένα από τα στοιχεία i και j θα επιλεγεί: $x_i + x_j = 1$
- Τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία i και j θα επιλεγεί: $x_i + x_j \geq 1$
- Το πολύ ένα από τα στοιχεία i και j θα επιλεγεί: $x_i + x_j \leq 1$
- Αν το στοιχείο i δεν επιλεγεί, ούτε το j θα επιλεγεί: $x_j \leq x_i$

Πρόβλημα εφάπαξ χρέωσης (σταθερού κόστους).

Πολλές φορές για την παραγωγή ενός προϊόντος υπάρχει ένα σταθερό κόστος k_j (κόστος προετοιμασίας/εκκίνησης) και ένα μεταβλητό κόστος ανάλογο του ύψους παραγωγής (x_j): $f_j(x_j) = c_j x_j$.

<u>Συνολικό κόστος:</u> $k_j + c_j x_j$, αν $x_j > 0$

0, αλλιώς.

Ορίζουμε τη μεταβλητή $y_i = 1$ αν $x_j > 0$

0, αν $x_j = 0$.

Τότε το κόστος γράφεται ως:

$k_j y_j + c_j x_j$

$x_j \le M y_j$, Μ μεγάλος πραγματικός αριθμός

↳ χρησιμοποιούμε τον περιορισμό αυτόν για να εξασφαλίσουμε ότι αν $y_j = 0$ τότε και $x_j = 0$, και αν $x_j > 0$ τότε $y_j = 1$

Ο αριθμός Μ επιλέγεται ως ο μικρότερος δυνατός θετικός αριθμός ο οποίος δεν αποκλείει εφικτές λύσεις

Παράδειγμα:

Ένας κοσμηματοπώλης εν όψει μιας επετείου σκοπεύει να φτιάξει επετειακά μενταγιόν από χρυσό, ασήμι και χαλκό.
Αν επιλέξει να παράγει έναν τύπο, τότε υπάρχει ένα σταθερό κόστος εκκίνησης παραγωγής και ένα κέρδος ανά μενταγιόν
Στόχος είναι ο προσδιορισμός της ποσότητας παραγωγής μενταγιόν κάθε τύπου ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος του κοσμηματοπώλη, δεδομένου ότι υπάρχει περιορισμένος χρόνος εργασίας, περιορισμένη διαθεσιμότητα μολυβιού (σε κιλά) καθώς και περιορισμένη διαθεσιμότητα σε πολύτιμους λίθους σε γραμμάρια.

	Χρυσό	Ασήμι	Χαλκός	Διαθεσιμότητα
Ώρες εργασίας	2	4	5	100
Μολύβι (κιλά)	1	1	1	30
Πολυτ. λίθοι (γραμ.)	10	5	2	204.
Κέρδος	52	30	20	
Κόστος εκ. παραγ.	500	400	300	

Scanned with CamScanner

Έστω x_i ο αριθμός μενταγιών τύπου i, $i=1,2,3$ που θα παράγει ο κοσμηματοποιός.

Τότε το κέρδος για κάθε τύπο μενταγιών είναι

$-500 + 52x_1$ αν $x_1 \geq 1$

$-400 + 30x_2$ αν $x_2 \geq 1$

$-300 + 20x_3$, αν $x_3 \geq 1$.

Οι συνολικές ώρες δεν μπορούν να υπερβούν τις 100: $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 100$

Τα κιλά μολυβιού δεν μπορούν να υπερβαίνουν τα 30: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$

Τα γραμ. πολυτ. λίθων δεν μπορούν να υπερβαίνουν τα 204: $10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 204$

Δεδομένου ότι το κόστος εκκίνησης της παραγωγής υπάρχει μόνο σε περίπτωση που ο τύπος αυτός θα παραχθεί

ορίζουμε $w_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_i = 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

και τότε το κέρδος για κάθε τύπο θα είναι

$-500w_1 + 52x_1$, αν $x_1 \geq 0$, $w_1 \in \{0,1\}$.

$-400w_2 + 30x_2$, αν $x_2 \geq 1$, $w_2 \in \{0,1\}$

$-300w_3 + 20x_3$, αν $x_3 \geq 1$, $w_3 \in \{0,1\}$.

$x_i \leq Mw_i$, $\forall i = 1,2,3$

• Αν δεν υπήρχε ο τελευταίος προσδιορισμός τότε σε κάθε πρόβλημα η βέλτιστη λύση θα περιλάμβανε $w_i = 0$ αφού αύξηση του w_i οδηγεί σε μείωση του συνολικού κέρδους. Έτσι θα προέκυπταν μη εφικτές λύσεις.

Το συνολικό κέρδος του κοσμηματοπώλη δίνεται από τη συνάρτηση
$$Z = -500w_1 + 52x_1 - 400w_2 + 30x_2 - 300w_3 + 20x_3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 100$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 30$$
$$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 204$$
$$x_1 \le Mw_1$$
$$x_2 \le Mw_2$$
$$x_3 \le Mw_3$$
$$x_i \ge 0,\ w_i \in \{0,1\}$$

Στόχος η μεγιστοποίηση της συνάρτησης Z

Χωροθέτηση αποθηκών:

Έστω ότι υπάρχει μια επιχείρηση που παράγει ένα προϊόν για τη διάθεση του σε n πελάτες. Το προϊόν μπορεί να αποθηκευτεί σε m αποθήκες και από εκεί να αποστέλλεται στον πελάτη. Η αποθήκη $i = 1, \dots m$ συνδέεται με ένα σταθερό κόστος λειτουργίας, f_i, σε περίπτωση που αυτή χρησιμοποιηθεί. Επιπλέον υπάρχει ένα μοναδιαίο κόστος μεταφοράς, c_{ij} του προϊόντος από την αποθήκη $i = 1, \dots m$ στον πελάτη $j \in \{1, \dots n\}$. Έστω ότι η ζήτηση του $j \in \{1, \dots n\}$ πελάτη είναι d_j.

Στόχος του προβλήματος είναι ο προσδιορισμός των αποθηκών που θα χρησιμοποιηθούν και η ποσότητα που θα σταλεί από αυτές στους πελάτες, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος της επιχείρησης.

Θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθοι περιορισμοί:

1) Η ζήτηση κάθε πελάτη πρέπει να ικανοποιηθεί
2) Ένα προϊόν μπορεί να διατεθεί από μια αποθήκη μόνο εφόσον αυτή είναι σε λειτουργία.

Μοντελοποίηση:

- Ορίζω $y_i = \begin{cases} 1 & , \text{αν η αποθήκη } i \text{ χρησιμοποιηθεί} \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$
- x_{ij}: Η ποσότητα που θα σταλεί από την αποθήκη i στον πελάτη j.

- Το συνολικό κόστος (κόστος λειτουργίας + μεταφοράς).

$$z = \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

- Για να εξασφαλιστεί ότι η ζήτηση κάθε πελάτη θα ικανοποιηθεί

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, \dots n$$

- Για να εξασφαλιστεί ότι αν η αποθήκη j δεν ανοίξει τότε κανένα προϊόν δεν μπορεί να αποσταλεί από εκεί

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M y_i \quad , \forall i = 1, \dots m$$

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να τοποθετηθεί σε κάθε αποθήκη είναι ίση με τη συνολική ζήτηση

$$M = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Lot sizing problem

Μια επιχείρηση θέλει να προγραμματίσει την παραγωγή ενός προϊόντος για να ικανοποιήσει τη ζήτηση των επόμενων n χρονικών περιόδων. Αν παράγει στην i περίοδο, τότε υπάρχει ένα σταθερό κόστος παραγωγής f_i και ένα μοναδιαίο κόστος παραγωγής c_i. Η ζήτηση d_i πρέπει να ικανοποιηθεί στην αρχή της i περιόδου και αν στο τέλος της περιόδου έχει μείνει απόθεμα, τότε υπάρχει ένα κόστος διατήρησης του, h_i. Το αρχικό και τελικό απόθεμα θεωρούνται μηδενικά και δεν υπάρχει περιορισμός χωρητικότητας

Μοντελοποίηση:

x_t: η ποσότητα του προϊόντος που παράγεται την t περίοδο $t=1,\dots,n$.

s_t: η ποσότητα που διατηρείται από την t περίοδο στην t+1. $t=0,\dots,n$

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_t>0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συνολικό κόστος (σταθερό κόστος παραγωγής, μοναδιαίο κόστος παραγωγής και διατήρησης)

$$z = \sum_{t=1}^{n} f_t y_t + \sum_{t=1}^{n} c_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t.$$

Το αρχικό και τελικό απόθεμα είναι 0: $s_0=0=s_n$

Στο τέλος μιας περιόδου, το απόθεμα ισούται με το απόθεμα που υπήρχε στο τέλος της προηγούμενης σύν την ποσότητα παραγωγής αυτής της περιόδου μείον τη ζήτηση αυτής της περιόδου:

$$S_t = S_{t-1} + X_t - d_t \quad \forall\, t=1,\dots n$$

Αν την περίοδο t υπάρχει παραγωγή αυτό προϋποθέτει εκκίνηση παραγωγής $X_t \le M_t y_t \quad \forall\, t=1,\dots n.$

Τέλος πρέπει $S_t \ge 0$, $X_t \ge 0$, $y_t = 0$ ή 1

$$M_t = \sum_{i=t}^{n} d_i$$

Set packing (περιβλήματος ενός συνόλου), covering (καλύμματος ενός συνόλου) partitioning (διαμερισμού ενός συνόλου)

Έστω μια συλλογή συνόλων $S_1,\dots S_n$, $S_i \subseteq \{1,\dots m\}$, $i=1,\dots n$

Σε κάθε σύνολο S_i υπάρχει ένα κέρδος/κόστος c_i

Έστω $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } S_j \text{ επιλεγεί} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

1.) Set packing

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \quad \forall\, i=1,\dots m$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

2] Set covering

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \quad \forall i = 1, \dots m.$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

3] Set partitioning

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \quad \forall i = 1, \dots m$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

Παράδειγμα:

Έστω ένα σύνολο αντικειμένων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και η συλλογή υποσυνόλων του S είναι η $L = \{(1,2), (1,3,5), (2,4,5), (3), (1), (4,5)\}$ με όλα τα μέλη της L να έχουν ίδιο κόστος a. Το $\{(1,2), (1,3,5), (2,4,5)\}$ είναι ένα κάλυμα του S αλλά όχι απαραίτητα το κάλυμα με το ελάχιστο κόστος. Το πρόβλημα είναι να καλυφθούν όλα τα μέλη του S με το ελάχιστο κόστος, από τα μέλη του L.

Το πρόβλημα με τη χρήση της δυαδικής μεταβλητής

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i \text{ μέλος ανήκει στο κάλυμα του } S \\ 0, & \text{αν το } i \text{ μέλος της } L \text{ δεν ανήκει στο κάλυμα του } S \end{cases}$$

Διατυπώνεται ως εξής:

$\min\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

με τους περιορισμούς

$x_1 + x_2 + x_5 \geq 1$

$x_1 + x_3 \geq 1$

$x_2 + x_4 \geq 1$

$x_3 + x_6 \geq 1$

$x_2 + x_3 + x_6 \geq 1$

Οι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι κάθε μέλος του S είναι καλυμμένο

Το x μπορεί να πάρει μια από πολλές τιμές

$x \in \{4, 8, 13\} \Rightarrow x = 4w_1 + 8w_2 + 13w_3$

$w_1 + w_2 + w_3 = 1$

$w_i = 0$ ή 1

$x \in \{0, 4, 8, 13\} \Rightarrow x = 4w_1 + 8w_2 + 13w_3$

$w_1 + w_2 + w_3 \leq 1$

$w_i = 0$ ή 1

Κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις

$$y(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 3 \\ 9 - x & 4 \leq x \leq 7 \\ -5 + x & 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

$w_1 = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ $\quad x_1 = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$w_2 = \begin{cases} 1, & \text{αν } 4 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ $\quad x_2 = \begin{cases} x, & \text{αν } 4 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$w_3 = \begin{cases} 1, & \text{αν } 8 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ $\quad x_3 = \begin{cases} x, & \text{αν } 8 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$0 \le x_1 \le 3w_1$
$4w_2 \le x_2 \le 7w_2$
$8w_3 \le x_3 \le 9w_3$
$w_1 + w_2 + w_3 = 1$
$x = x_1 + x_2 + x_3$
$w_i \in \{0, 1\}$

Πρόβλημα Πλανόδιου πωλητή (Traveling salesman problem)

Ενας πωλητής ξεκινώντας από μια πόλη A, πρέπει να επισκεφτεί n-1 πόλεις και να επιστρέψει στην πόλη A.
Το κόστος μετάβασης (ή η απόσταση) απο την πόλη i στην πόλη j είναι c_{ij} και υπάρχει ο περιορισμός ότι πρέπει να επισκεφτεί την κάθε πόλη ακριβώς μια φορά.
Στόχος: ο προσδιορισμός της διαδρομής που πρέπει να ακολουθήσει ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο πωλητής μεταβεί απο την πόλη } i \text{ στην } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το συνολικό κοστος: $z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

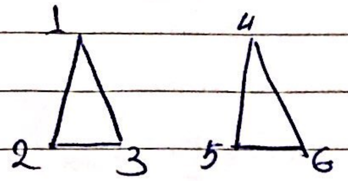
Οταν βρεθεί σε μια πολη μπορεί να μεταβεί απευθείας μονο σε μια πόλη:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, .. n$$

Επισκεπτεται μονο μια φορα καθε πόλη:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, ... n.$$

Προβλημα της εκχώρησης μπορει να δωσει αδυνατη λύση.



$x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \ge 1$

Εξασφαλίζει οτι τουλαχιστον ενα τμημα της διαδρομης θα ενωνει τις πολεις 1,2,3 με τις 4,5,6

Ασκ. 1 | Φυλ. 1

Εστω x_{ij}: Η ποσοτητα που μεταφερεται απο την πολη $i \to j$.

$y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ανοίξει αποθηκη στην πολη } i \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases}$

1: Νεα Υορκη, 2: Λος Άντζελες 3: Σικαγο 4: Ατλαντα

Φ

Συνολικό κοστος.

$Z = 20x_{11} + \quad + 35x_{43} + 400y_1 + 500y_2 + 300y_3 + 150y_4$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \ge 80$ [Η περιοχη 1 απαιτει 80 μοναδες τη εβδομαδα].

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \ge 70$ [περιοχ. 2: 70 μοναδες]

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \ge 40$ [περιοχη: 3 : 40 μοναδες]

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 100y_1$ [Δυνατοτητα αποστολης απο την αποθ. 1]

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 100y_2$ » 2

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 100y_3$ » 3

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 100y_4$ » 4

$y_1 \le y_2$ Η Αποθηκη στην Νεα Υορκη προϋποθετει οτι θα ανοίξει αποθηκη στο Λος Αντζελες.

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2$ ανοιγουν το πολυ 2 αποθηκες

$y_2 + y_4 \le 1$ (αποθηκη είτε στην Ατλαντα είτε στο Λος Αντζελες